



คู่มือครู

รายวิชาเพิ่มเติม



คณิตศาสตร์ ม.5

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ตัวอย่าง
หลักสูตรปรับปรุง '60



เพิ่ม

คำแนะนำการใช้ ช่วยสร้างความเข้าใจ เพื่อใช้คู่มือครูได้อย่างถูกต้องและเกิดประสิทธิภาพสูงสุด

คำอธิบายรายวิชา แสดงขอบข่ายเนื้อหาสาระของรายวิชา ซึ่งครอบคลุมผลการเรียนรู้ตามที่หลักสูตรกำหนด

Pedagogy ช่วยสร้างความเข้าใจในกระบวนการออกแบบการจัดการเรียนการสอนแบบ Active Learning ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

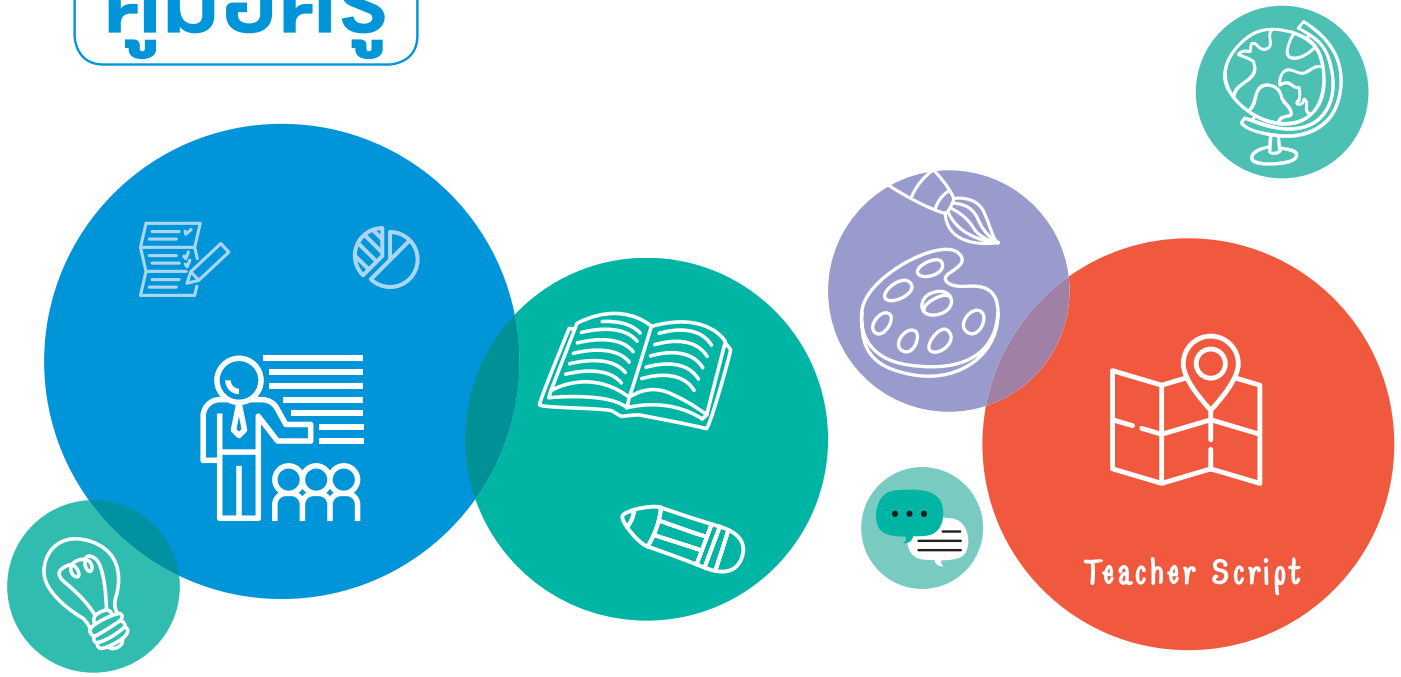
Teacher Guide Overview ช่วยให้เห็นภาพรวมของการจัดการเรียนการสอนทั้งหมดของรายวิชา ก่อนที่จะลงมือสอนจริง

Chapter Overview ช่วยสร้างความเข้าใจและเห็นภาพรวมในการออกแบบแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละหน่วย

ข้อสอบเน้นการคิด/ข้อสอบแนว O-NET เพื่อเตรียมความพร้อมของผู้เรียนสู่การสอบในระดับต่าง ๆ

ทักษะ 21st Century Skills กิจกรรมที่จะช่วยพัฒนาผู้เรียนให้มีทักษะที่จำเป็นสำหรับการเรียนรู้และการดำรงชีวิตในโลกแห่งศตวรรษที่ 21

คู่มือครู



คณิตศาสตร์ ม.5

เล่ม 1

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียงหนังสือเรียน

นางกนกวลี อุษณกรกุล
รศ. ดร.อำพล ธรรมเจริญ
นายไอศุรีย์ สุดประเสริฐ
นางจินดา อยู่เป็นสุข
นายรณชัย มาเจริญทรัพย์
นายวุฒิชัย ศรีวิสุธากุล
นางนพรัตน์ วันแก้ว
นางสาวสายสุณี สุทธิจักษ์

ผู้เรียบเรียงคู่มือครู

นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุมคช
นายธีระพงษ์ มวานนท์

ผู้ตรวจหนังสือเรียน

ดร.ขวัญ เพ็ญชัย
นางสาวรุจิรา พิพิธพจนการณ
นางสาวบุรณาด เอยฉิน

บรรณาธิการคู่มือครู

นางสาวนุศรา ชมเชย
นางสาววรรณทัศน์ เลิศอภิสิทธิ์

บรรณาธิการคู่มือครู

นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุมคช



www.aksorn.com

จัดพิมพ์และจำหน่ายทั่วประเทศโดย

บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจก. จำกัด

142 ถนนตะนาว เขตพระนคร กรุงเทพมหานคร 10200

โทร./แฟกซ์: 0 2622 2999 (อัตโนมัติ 20 คู่สาย)

พิมพ์ที่: บริษัท ไทยรมเกล้า จำกัด โทร. 0 2903 9101-6

คำแนะนำการใช้

คู่มือครู รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่มนี้ จัดทำขึ้นสำหรับให้ครูผู้สอนใช้เป็นแนวทางวางแผนการจัดการเรียนการสอน เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและการประกันคุณภาพผู้เรียน ตามนโยบายของสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน (สพฐ.)

เน้น **คำแนะนำการใช้** ช่วยสร้างความเข้าใจ เพื่อใช้คู่มือครูได้อย่างถูกต้องและเกิดประสิทธิภาพสูงสุด

เน้น **คำอธิบายรายวิชา** แสดงขอบข่ายเนื้อหาสาระของรายวิชา ซึ่งครอบคลุมผลการเรียนรู้ตามที่หลักสูตรกำหนด

เน้น **Pedagogy** ช่วยสร้างความเข้าใจในกระบวนการออกแบบการจัดการเรียนการสอนแบบ Active Learning ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

เน้น **Teacher Guide Overview** ช่วยให้เห็นภาพรวมของการจัดการเรียนการสอนทั้งหมดของรายวิชาก่อนที่จะลงมือสอนจริง

เน้น **Chapter Overview** ช่วยสร้างความเข้าใจและเห็นภาพรวมในการออกแบบแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละหน่วย

เน้น **ข้อสอบเน้นการคิด/ข้อสอบแนว O-NET** เพื่อเตรียมความพร้อมของผู้เรียนสู่การสอบในระดับต่างๆ

เน้น **กิจกรรม 21st Century Skills** กิจกรรมที่จะช่วยพัฒนาผู้เรียนให้มีทักษะที่จำเป็นสำหรับการเรียนรู้และการดำรงชีวิตในโลกแห่งศตวรรษที่ 21

โซน 1 ช่วยครูจัดการเรียนการสอน

แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้ครูผู้สอน โดยแนะนำขั้นตอนการสอน และการจัดกิจกรรมอย่างละเอียด เพื่อให้ให้นักเรียนบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามตัวชี้วัด



โซน 2 ช่วยครูเตรียมสอน

โดยประกอบด้วยองค์ประกอบต่าง ๆ ที่เป็นประโยชน์สำหรับครู เพื่อนำไปประยุกต์ใช้จัดกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน

เก็ตรึ้นแนะครู
 ความรู้เสริมสำหรับครู ข้อเสนอนแนะ ข้อสังเกต แนวทางการจัดกิจกรรมและอื่น ๆ เพื่อประโยชน์ในการจัดการเรียนการสอน

นักเรียนควรรู้
 ความรู้เพิ่มเติมจากเนื้อหา สำหรับอธิบายเสริมเพิ่มเติมให้กับนักเรียน

โดยใช้ หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 และแบบฝึกหัดคณิตศาสตร์ ม.5 ของบริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด เป็นสื่อหลัก (Core Materials) ประกอบการสอนและการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อให้สอดคล้องกับ ผลการเรียนรู้ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งคู่มือครูเล่มนี้มียอดจำหน่ายที่ง่ายต่อการใช้งาน ดังนี้

โซน 3 ช่วยครูเตรียมนักเรียน

ประกอบด้วยแนวทางสำหรับการจัดกิจกรรมและ เสนอแนะแนวข้อสอบ เพื่ออำนวยความสะดวกให้แก่ครูผู้สอน

กิจกรรม 21st Century Skills
กิจกรรมที่ให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้ความรู้ที่เรียนรู้มาสร้าง ชิ้นงาน หรือทำกิจกรรมรวบรวมยอดเพื่อให้เกิดทักษะที่จำเป็น ในศตวรรษที่ 21

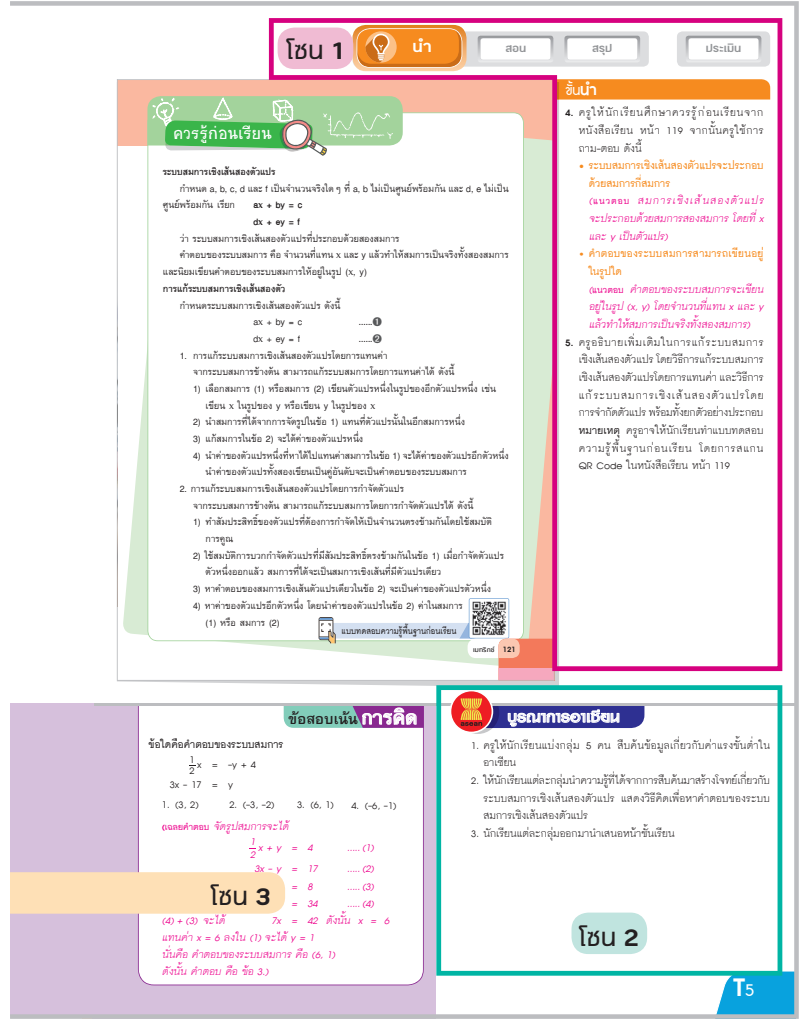
ข้อสอบเน้นการคิด
ตัวอย่างข้อสอบที่มุ่งเน้นการคิด มีทั้งปรนัย-อัตนัย พร้อมเฉลยอย่างละเอียด

ข้อสอบเน้นการคิดแนว O-NET
ตัวอย่างข้อสอบที่มุ่งเน้นการคิดวิเคราะห์ และสอดคล้องกับ แนวข้อสอบ O-NET มีทั้งปรนัย-อัตนัย พร้อมเฉลยอย่างละเอียด

กิจกรรมเสริมสร้างคุณลักษณะอันพึงประสงค์
กิจกรรมที่มุ่งเน้นการพัฒนาคุณภาพผู้เรียนด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม ตามที่หลักสูตรกำหนด

กิจกรรมทักทาย
เสนอแนะแนวทางการจัดกิจกรรม เพื่อต่อยอดสำหรับนักเรียน ที่เรียนรู้ได้อย่างรวดเร็ว และต้องการทำทายความสามารถใน ระดับที่สูงขึ้น

กิจกรรมสร้างเสริม
เสนอแนะแนวทางการจัดกิจกรรมซ่อมเสริมสำหรับนักเรียน ที่ควรได้รับการพัฒนาการเรียนรู้



บูรณาการอาเซียน

ความรู้เสริมหรือการเชื่อมโยงในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับประชาคมอาเซียน

สื่อ Digital

แนะนำแหล่งเรียนรู้และแหล่งค้นคว้าจากสื่อ Digital ต่าง ๆ

แนวทางการวัดและประเมินผล

เสนอแนะแนวทางการบรรลุผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน ตามผลการเรียนรู้ที่หลักสูตรกำหนด

เฉลยละเอียด

หนังสือเรียน คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1
สามารถเข้าไปดาวน์โหลดได้ที่

www.aksorn.com



คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เวลาเรียน 80 ชั่วโมง/ภาคเรียน

ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ การวัดความยาวส่วนโค้งและพิสัยของจุดปลายส่วนโค้ง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุม ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เอกภาคณและสมการตรีโกณมิติ กฎของไซน์และโคไซน์ และการหาระยะทางและความสูง ระบบสมการเชิงเส้น เมทริกซ์ การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2×2 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม และการใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น ระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ และการนำเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

โดยการจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องให้ผู้เรียนได้ศึกษา ค้นคว้า ฝึกทักษะ โดยปฏิบัติจริง ทดลอง สรุป รายงาน เพื่อพัฒนาทักษะ กระบวนการในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร ความหมายทางคณิตศาสตร์และนำประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิด ทักษะและกระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์

เพื่อให้เห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานได้อย่างเป็นระบบ มีระเบียบ รอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
2. แก้สมการตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
3. ใช้กฎของไซน์และกฎของโคไซน์ในการแก้ปัญหา
4. เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน หาดิเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม
5. หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2×2
6. แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน และการดำเนินการตามแถว
7. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์
8. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

รวม 8 ผลการเรียนรู้

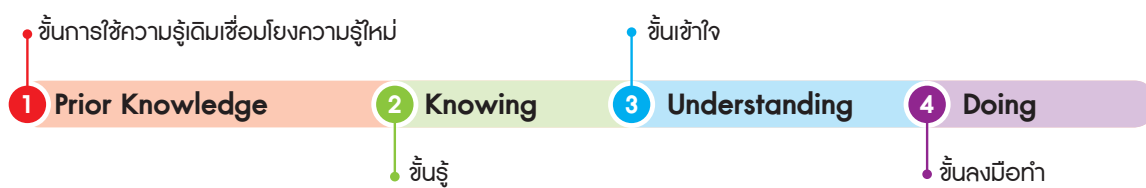


Pedagogy

คู่มือครู รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1

รวมถึงสื่อการเรียนรู้รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้น ม.5 เล่ม 1 ผู้จัดทำได้ออกแบบการสอน (Instructional Design) อันเป็นวิธีการจัดการเรียนรู้และเทคนิคการสอนที่เปี่ยมด้วยประสิทธิภาพและมีความหลากหลายให้กับผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนสามารถบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามผลการเรียนรู้ รวมถึงสมรรถนะและคุณลักษณะอันพึงประสงค์ของผู้เรียนที่หลักสูตรกำหนดไว้ โดยครูสามารถนำไปใช้สำหรับจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียนได้อย่างเหมาะสมสำหรับ Pedagogy หลักที่นำมาใช้ออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ประกอบด้วย

รูปแบบการสอน Concept Based Teaching



เลือกใช้รูปแบบการสอนโดยยึดผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง : **Concept Based Teaching** เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นเครื่องมือในการดำเนินชีวิต โดยอาศัยหลักการและความคิดรวบยอดต่าง ๆ เพื่อประยุกต์ใช้ ดังนั้น Concept Based Teaching เป็นการจัดการเรียนการสอนที่นำพาผู้เรียน เพื่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจ มีทักษะ และเกิดความคิดรวบยอดผลของการจัดการเรียนการสอนในลักษณะนี้ จะทำให้ผู้เรียนได้ความรู้ และมีทักษะในการค้นหาความคิดรวบยอด ซึ่งจะเป็นทักษะสำคัญติดตัวผู้เรียนไปตลอดชีวิต

วิธีสอน (Teaching Method)

เลือกใช้วิธีการสอนที่หลากหลาย เช่น อุปนัย นิรนัย การสาธิต แบบสาธิต แบบแก้ปัญหา แบบบรรยาย เป็นต้น เพื่อส่งเสริมการเรียนรู้และเกิดความเข้าใจในเนื้อหาคณิตศาสตร์อย่างถ่องแท้ โดยจะเน้นใช้วิธีสอนแบบอุปนัย (Inductive Method) เนื่องจากเป็นการสอนที่ผู้เรียนจะได้ค้นหาสิ่งที่มีอยู่ร่วมกัน จากตัวอย่างสถานการณ์ต่าง ๆ ซึ่งสนับสนุนกับการจัดการเรียนการสอนแบบ Concept Based Teaching ที่ทำให้ผู้เรียนได้เรียนรู้กระบวนการ ซึ่งทำให้ได้ความคิดรวบยอดที่สำคัญ

เทคนิคการสอน (Teaching Technique)

เลือกใช้เทคนิคการสอนที่หลากหลายและเหมาะสมกับเรื่องที่เรียน เช่น การใช้คำถาม การใช้ตัวอย่างกระตุ้นความคิด การใช้แผนภาพ และการใช้สื่อการเรียนรู้ที่น่าสนใจ เป็นต้น เพื่อส่งเสริมวิธีการสอนและรูปแบบการสอนให้มีประสิทธิภาพในการจัดการเรียนรู้ให้มากยิ่งขึ้น ซึ่งช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีความสุข และสามารถฝึกฝนทักษะการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ได้



Teacher Guide Overview

คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1

| หน่วยการเรียนรู้ | ผลการเรียนรู้ | ทักษะที่ได้ | เวลาที่ใช้ | การประเมิน | สื่อที่ใช้ |
|------------------------------------|--|---|----------------------|--|---|
| 1 ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ | <ol style="list-style-type: none"> เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา แก้สมการตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา | <ul style="list-style-type: none"> - ทักษะการสำรวจค้นหา - ทักษะการเชื่อมโยง - ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา - ทักษะการวิเคราะห์ - ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ | 40 ชั่วโมง | <ul style="list-style-type: none"> - ตรวจใบงานที่ 1.1-1.13 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะในหนังสือเรียน - ตรวจสอบแบบฝึกหัดในแบบฝึกหัด คณิตศาสตร์ - การนำเสนอผลงาน - ตรวจผังมโนทัศน์หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ - สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล - สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม - สังเกตความมีวินัยใฝ่เรียนรู้ มุ่งมั่นในการทำงาน | <ul style="list-style-type: none"> - หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - แบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - ใบงาน |
| 2 เมทริกซ์ | <ol style="list-style-type: none"> เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน หาคดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2×2 แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน และการดำเนินการตามแถว | <ul style="list-style-type: none"> - ทักษะการปรับโครงสร้าง - ทักษะการตีความ - ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา - ทักษะการสรุป - ทักษะการวิเคราะห์ - ทักษะการนำความรู้ไปใช้ | 20 ชั่วโมง | <ul style="list-style-type: none"> - ตรวจใบงานที่ 2.1-2.6 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะในหนังสือเรียน - ตรวจสอบแบบฝึกหัดในแบบฝึกหัด คณิตศาสตร์ - การนำเสนอผลงาน - ตรวจผังมโนทัศน์หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์ - สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล - สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม - สังเกตความมีวินัยใฝ่เรียนรู้ มุ่งมั่นในการทำงาน | <ul style="list-style-type: none"> - หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - แบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - ใบงาน - QR Code |
| 3 เวกเตอร์ ในสามมิติ | <ol style="list-style-type: none"> หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์ นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา | <ul style="list-style-type: none"> - ทักษะการปรับโครงสร้าง - ทักษะการเชื่อมโยง - ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา - ทักษะการวิเคราะห์ - ทักษะการนำความรู้ไปใช้ | 20 ชั่วโมง | <ul style="list-style-type: none"> - ตรวจใบงานที่ 3.1-3.8 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะในหนังสือเรียน - ตรวจสอบแบบฝึกหัดในแบบฝึกหัด คณิตศาสตร์ - การนำเสนอผลงาน - ตรวจผังมโนทัศน์หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ - สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล - สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม - สังเกตความมีวินัยใฝ่เรียนรู้ มุ่งมั่นในการทำงาน | <ul style="list-style-type: none"> - หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - แบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - ใบงาน |



สารบัญ

| Chapter Title | Chapter Overview | Teacher Script |
|--|------------------|--|
| หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ 1.1 การวัดความยาวส่วนโค้งและพื้นที่ของจุดปลายส่วนโค้ง 1.2 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ 1.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ 1.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 1.5 การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ 1.6 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 1.7 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม 1.8 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุม 1.9 ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 1.10 ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 1.11 เอกลักษณะตรีโกณมิติและสมการตรีโกณมิติ 1.12 กฎของไซน์และโคไซน์ 1.13 การหาระยะทางและความสูง ท้ายหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 | T2-T5 | T6-T7 T8-T10 T11-T28 T29-T37 T38-T46 T47-T51 T52-T64 T65-T76 T77-T82 T83-T86 T87-T97 T98-T104 T105-T110 T111-T116 T117-T123 |
| หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์ 2.1 ระบบสมการเชิงเส้น 2.2 เมทริกซ์ 2.3 เมทริกซ์ผกผัน 2.4 ดีเทอร์มิแนนต์ 2.5 การใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น ท้ายหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 | T124-T125 | T126-T127 T128-T133 T134-T160 T161-T167 T168-T186 T187-T203 T204-T209 |
| หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ 3.1 ระบบพิกัดฉากสามมิติ 3.2 เวกเตอร์ 3.3 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์ 3.5 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ 3.6 การนำเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา ท้ายหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 | T210-T211 | T212-T213 T214-T224 T225-T242 T243-T262 T263-T268 T269-T275 T276-T281 T282-T287 |

อภิธานศัพท์

T288 - T290

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

T291 - T300

บรรณานุกรม

T301





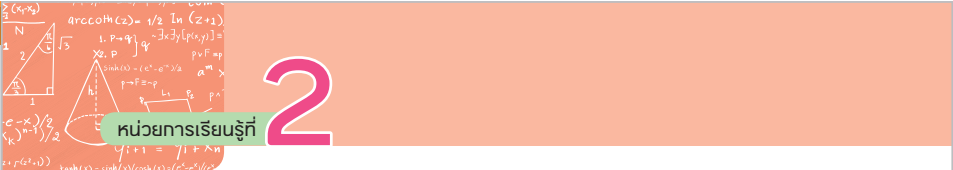
Chapter Overview

| แผนการจัดการเรียนรู้ | สื่อที่ใช้ | จุดประสงค์ | วิธีสอน | ประเมิน | ทักษะที่ได้ | คุณลักษณะอันพึงประสงค์ |
|---|---|--|------------------------|--|---|---|
| แผนฯ ที่ 1 ระบบการเชิงเส้น 2 ชั่วโมง | <ul style="list-style-type: none"> - หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - แบบฝึกหัด รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 | <ol style="list-style-type: none"> 1. บอกความหมายของสมการเชิงเส้นได้ (K) 2. คำนวณหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้ (K) 3. เขียนแสดงขั้นตอนวิธีการแก้ระบบสมการได้ โดยใช้วิธีการกำจัดตัวแปร (P) 4. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย (A) | แบบนิรนัย (Deduction) | <ul style="list-style-type: none"> - ตรวจใบงานที่ 2.1 - ตรวจ Exercise 2.1 - ประเมินการนำเสนอผลงาน - สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล - สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม - สังเกตความมีวินัยใฝ่เรียนรู้ มุ่งมั่นในการทำงาน | <ul style="list-style-type: none"> - ทักษะการปรับโครงสร้าง - ทักษะการตีความ - ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา - ทักษะการสรุป - ทักษะการวิเคราะห์ | <ol style="list-style-type: none"> 1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน |
| แผนฯ ที่ 2 เมทริกซ์ 5 ชั่วโมง | <ul style="list-style-type: none"> - หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - แบบฝึกหัด รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - ใบงานที่ 2.1 เรื่อง การบวกเมทริกซ์ - ใบงานที่ 2.2 เรื่อง การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง - ใบงานที่ 2.3 เรื่อง การคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์ | <ol style="list-style-type: none"> 1. บอกความหมายและสมบัติต่าง ๆ ของเมทริกซ์ได้ (K) 2. คำนวณหาคำตอบของเมทริกซ์ได้ (K) 3. หาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนได้ (K) 4. เขียนแสดงขั้นตอนวิธีการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ได้ (P) 5. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย (A) | แบบอุปนัย (Induction) | <ul style="list-style-type: none"> - ตรวจใบงานที่ 2.1 เรื่อง การบวกเมทริกซ์ - ตรวจใบงานที่ 2.2 เรื่อง การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง - ตรวจใบงานที่ 2.3 เรื่อง การคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์ - ตรวจแบบฝึกทักษะ 2.2 - ตรวจ Exercise 2.2 - ประเมินการนำเสนอผลงาน - สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล - สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม - สังเกตความมีวินัยใฝ่เรียนรู้ มุ่งมั่นในการทำงาน | <ul style="list-style-type: none"> - ทักษะการปรับโครงสร้าง - ทักษะการตีความ - ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา - ทักษะการสรุป - ทักษะการวิเคราะห์ | <ol style="list-style-type: none"> 1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน |
| แผนฯ ที่ 3 เมทริกซ์ผกผัน 4 ชั่วโมง | <ul style="list-style-type: none"> - หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - แบบฝึกหัด รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - ใบงานที่ 2.4 เรื่อง เมทริกซ์ผกผัน | <ol style="list-style-type: none"> 1. บอกความหมายและสมบัติของเมทริกซ์ผกผันได้ (K) 2. คำนวณหามเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2×2 ได้ (K) 3. เขียนแสดงขั้นตอนวิธีการหาเมทริกซ์ผกผันได้ (P) | Concept Based Teaching | <ul style="list-style-type: none"> - ตรวจใบงานที่ 2.4 เรื่อง เมทริกซ์ผกผัน - ตรวจแบบฝึกทักษะ 2.3 - ตรวจ Exercise 2.3 - ประเมินการนำเสนอผลงาน - สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล | <ul style="list-style-type: none"> - ทักษะการปรับโครงสร้าง - ทักษะการตีความ - ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา - ทักษะการสรุป - ทักษะการวิเคราะห์ | <ol style="list-style-type: none"> 1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน |

| แผนการจัดการเรียนรู้ | สื่อที่ใช้ | จุดประสงค์ | วิธีสอน | ประเมิน | ทักษะที่ได้ | คุณลักษณะอันพึงประสงค์ |
|--|--|--|-----------------------|---|---|---|
| | | 4. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย (A) | | - สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม - สังเกตความมีวินัยใฝ่เรียนรู้ มุ่งมั่นในการทำงาน | | |
| แผนฯ ที่ 4 ดิเทอร์มิแนนต์ 4 ชั่วโมง | - หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - แบบฝึกหัด รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - ใบงานที่ 2.5 เรื่อง ดิเทอร์มิแนนต์ | 1. บอกความหมายและสมบัติของ ดิเทอร์มิแนนต์ได้ (K) 2. คำนวณหา ดิเทอร์มิแนนต์ของ เมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม (K) 3. เขียนแสดงขั้นตอนวิธีการหา ดิเทอร์มิแนนต์ได้ (P) 4. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย (A) | แบบอุปนัย (Induction) | - ตรวจสอบงานที่ 2.5 เรื่อง ดิเทอร์มิแนนต์ - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 2.4 - ตรวจสอบ Exercise 2.4 - ประเมินการนำเสนอผลงาน - สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล - สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม - สังเกตความมีวินัยใฝ่เรียนรู้ มุ่งมั่นในการทำงาน | - ทักษะการปรับโครงสร้าง - ทักษะการตีความคิดแก้ปัญหา - ทักษะการสรุปวิเคราะห์ | 1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน |
| แผนฯ ที่ 5 การใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น 5 ชั่วโมง | - หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - แบบฝึกหัด รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 - ใบงานที่ 2.6 เรื่อง การใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น | 1. คำนวณหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้โดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถวได้ (K) 2. เขียนแสดงขั้นตอนวิธีการใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถวแก้ระบบสมการเชิงเส้นได้ (P) 3. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย (A) | แบบนิรนัย (Deduction) | - ตรวจสอบงานที่ 2.6 เรื่อง การใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 2.5 - ตรวจสอบ Exercise 2.5 - ตรวจสอบแบบฝึกทักษะประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 - ตรวจสอบผังมโนทัศน์หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์ - ประเมินการนำเสนอผลงาน - สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล - สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายกลุ่ม - สังเกตความมีวินัยใฝ่เรียนรู้ มุ่งมั่นในการทำงาน | - ทักษะการปรับโครงสร้าง - ทักษะการตีความคิดแก้ปัญหา - ทักษะการสรุปวิเคราะห์ - ทักษะการนำความรู้ไปใช้ | 1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน |

ขั้นนำ (Deduction)

1. ครูแจ้งผลการเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ
 2. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียน โดยให้นักเรียนดูภาพหน้าหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 จากหนังสือเรียน หน้า 118
 3. ครูถามคำถามประจำหน่วยการเรียนรู้ว่า “นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องเมทริกซ์มาใช้ในการหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรไฟฟ้าได้อย่างไร” แล้วให้นักเรียนร่วมกันแสดงความคิดเห็น
- หมายเหตุ ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำถามประจำหน่วยการเรียนรู้ หลังเรียนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2



เมทริกซ์

“การหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรไฟฟ้าจะต้องเขียนสมการโดยอาศัยกฎของเคอร์ชอฟฟ์ ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการเชิงเส้นมาชุดหนึ่ง จากนั้นจึงแก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาคำตอบตามที่ต้องการ

นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องเมทริกซ์มาใช้ในการหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรไฟฟ้าได้อย่างไร ?



เฉลย คำถามในหนังสือเรียน หน้า 118

การหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรไฟฟ้าแบบปิด 2 วง สามารถใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์ ในการหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลในแต่ละวงจรซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรซึ่งสามารถแก้สมการเชิงเส้นของตัวแปรโดยการจำกัดตัวแปรหรือการแทนค่าตัวแปร ในบางครั้ง 2 วิธีนี้อาจจะทำได้ยากจึงมีการนำเมทริกซ์มาช่วยในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นซึ่งมีวิธี ดังนี้

- 1) ใช้เมทริกซ์ผกผัน
- 2) ใช้กฎของคราเมอร์
- 3) ใช้การดำเนินการตามแถว

ผลการเรียนรู้

- เข้าใจความหมาย ทาสลัทธิของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม
- หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2×2
- แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน และการดำเนินการตามแถว

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- เมทริกซ์ และเมทริกซ์สลับเปลี่ยน
- ดีเทอร์มิแนนต์
- การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์
- การบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์
- เมทริกซ์ผกผัน

เกร็ดแะครู

กิจกรรมการเรียนการสอนของหน่วยการเรียนรู้นี้ ครูควรยกตัวอย่างเพิ่มเติมพร้อมเปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นและซักถามข้อสงสัยและจัดกิจกรรมให้นักเรียนร่วมกันหาคำตอบ เพื่อให้นักเรียนได้เกิดทักษะการคิดและความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้นไป

นักเรียนควรรู้

1 เมทริกซ์ (Matrix) คือ จำนวนที่จัดเป็นแถวและหลักเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยเขียนอยู่ในเครื่องหมายวงเล็บ

กิจกรรม เสริมสร้างคุณลักษณะอันพึงประสงค์

ครูควรจัดกิจกรรมการพัฒนาคุณลักษณะโดยใช้กิจกรรมกลุ่ม การเรียนรู้แบบร่วมมือ เพื่อให้นักเรียนเรียนรู้การวางแผน รู้จักการทำงานร่วมกัน มีความรับผิดชอบต่อนหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย เสริมสร้างความมั่นใจในท้องถิ่นห้องเรียน เช่น กิจกรรมทนายข้างซัก โดยให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3-4 คน พุดคุยซักถามกัน แลกเปลี่ยนความรู้ภายในกลุ่ม จนเกิดความเข้าใจตรงกัน

ควรรู้ก่อนเรียน

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

กำหนด a, b, c, d และ f เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ d, e ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียก $ax + by = c$

$$dx + ey = f$$

ว่า ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ประกอบด้วยสองสมการ

คำตอบของระบบสมการ คือ จำนวนที่แทน x และ y แล้วทำให้สมการเป็นจริงทั้งสองสมการ และนิยมเขียนคำตอบของระบบสมการให้อยู่ในรูป (x, y)

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัว

กำหนดระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ดังนี้

$$ax + by = c \quad \dots\dots ①$$

$$dx + ey = f \quad \dots\dots ②$$

1. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยการแทนค่า

จากระบบสมการข้างต้น สามารถแก้ระบบสมการโดยการแทนค่าได้ ดังนี้

- 1) เลือกสมการ (1) หรือสมการ (2) เขียนตัวแปรหนึ่งในรูปของอีกตัวแปรหนึ่ง เช่น เขียน x ในรูปของ y หรือเขียน y ในรูปของ x
- 2) นำสมการที่ได้จากการจัดรูปในข้อ 1) แทนที่ตัวแปรนั้นในอีกสมการหนึ่ง
- 3) แก้สมการในข้อ 2) จะได้ค่าของตัวแปรหนึ่ง
- 4) นำค่าของตัวแปรหนึ่งที่ได้ไปแทนค่าสมการในข้อ 1) จะได้ค่าของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง นำค่าของตัวแปรทั้งสองเขียนเป็นคู่อันดับจะเป็นคำตอบของระบบสมการ

2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยการกำจัดตัวแปร

จากระบบสมการข้างต้น สามารถแก้ระบบสมการโดยการกำจัดตัวแปรได้ ดังนี้

- 1) ทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ต้องการกำจัดให้เป็นจำนวนตรงข้ามกันโดยใช้สมบัติการคูณ
- 2) ใช้สมบัติการบวกกำจัดตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์ตรงข้ามกันในข้อ 1) เมื่อกำจัดตัวแปรตัวหนึ่งออกแล้ว สมการที่ได้จะเป็นสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรเดียว
- 3) หาคำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในข้อ 2) จะเป็นค่าของตัวแปรตัวหนึ่ง
- 4) หาคำของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง โดยนำค่าของตัวแปรในข้อ 2) ค่าในสมการ (1) หรือ สมการ (2)



แบบทดสอบความรู้พื้นฐานก่อนเรียน



บทที่ 5 121

ขั้นนำ

4. ครูให้นักเรียนศึกษาควรรู้ก่อนเรียนจากหนังสือเรียน หน้า 119 จากนั้นครูใช้การถาม-ตอบ ดังนี้

- ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจะประกอบด้วยสมการกี่สมการ

(แนวตอบ สมการเชิงเส้นสองตัวแปร จะประกอบด้วยสมการสองสมการ โดยที่ x และ y เป็นตัวแปร)

- คำตอบของระบบสมการสามารถเขียนอยู่ในรูปใด

(แนวตอบ คำตอบของระบบสมการจะเขียนอยู่ในรูป (x, y) โดยจำนวนที่แทน x และ y แล้วทำให้สมการเป็นจริงทั้งสองสมการ)

5. ครูอธิบายเพิ่มเติมในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยวิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยการแทนค่า และวิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยการกำจัดตัวแปร พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบหมายเหตุ ครูอาจให้นักเรียนทำแบบทดสอบความรู้พื้นฐานก่อนเรียน โดยการสแกน QR Code ในหนังสือเรียน หน้า 119

ข้อสอบเน้น การคิด

ข้อใดคือคำตอบของระบบสมการ

$$\frac{1}{2}x = -y + 4$$

$$3x - 17 = y$$

1. (3, 2) 2. (-3, -2) 3. (6, 1) 4. (-6, -1)

เฉลยคำตอบ จัดรูปสมการจะได้

$$\frac{1}{2}x + y = 4 \quad \dots\dots (1)$$

$$3x - y = 17 \quad \dots\dots (2)$$

(1) $\times 2$ จะได้ $x + 2y = 8 \quad \dots\dots (3)$

(2) $\times 2$ จะได้ $6x - 2y = 34 \quad \dots\dots (4)$

(4) + (3) จะได้ $7x = 42$ ดังนั้น $x = 6$

แทนค่า $x = 6$ ลงใน (1) จะได้ $y = 1$

นั่นคือ คำตอบของระบบสมการ คือ (6, 1)

ดังนั้น คำตอบ คือ ข้อ 3.)



บูรณาการอาเซียน

1. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม 5 คน สืบค้นข้อมูลเกี่ยวกับค่าแรงขั้นต่ำในอาเซียน
2. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มนำความรู้ที่ได้จากการสืบค้นมาสร้างโจทย์เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร แสดงวิธีคิดเพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
3. นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน



ข้อสอบ

- ครูอธิบายให้นักเรียนฟังว่า สมการเชิงเส้น คือ สมการที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรทุกตัวเป็นหนึ่ง
- ครูเขียนโจทย์ต่อไปนี้ บนกระดาน

1) $-8x + 4 = 6$ 2) $3x - 2y = 5$
 3) $2x - 3y + z = -5$

หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- สมการในข้อใดบ้างที่เป็นสมการเชิงเส้น (แนวตอบ สมการในข้อ 1), 2) และ 3) เป็นสมการเชิงเส้น เพราะตัวแปรทุกตัวของทุกสมการมีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง)
- สมการในโจทย์ข้อ 1) มีกี่ตัวแปร (แนวตอบ มี 1 ตัวแปร คือ ตัวแปร x)
- สมการในโจทย์ข้อ 2) มีกี่ตัวแปร (แนวตอบ มี 2 ตัวแปร คือ ตัวแปร x และ y)
- สมการในโจทย์ข้อ 3) มีกี่ตัวแปร (แนวตอบ มี 3 ตัวแปร คือ ตัวแปร x, y และ z)

3. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปว่า สมการข้างต้น เราจะเรียกว่าสมการเชิงเส้น n ตัวแปร เช่น สมการข้อ 1) เราจะเรียกว่า สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สมการข้อ 2) เราจะเรียกว่าสมการเชิงเส้นสองตัวแปร และในทำนองเดียวกันสมการโจทย์ข้อ 3) เราจะเรียกว่าสมการเชิงเส้นสามตัวแปร

4. ครูอธิบายระบบสมการเชิงเส้นให้นักเรียนฟังว่า ระบบสมการเชิงเส้น ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นตั้งแต่สองสมการขึ้นไป พร้อมยกตัวอย่างบนกระดาน ดังนี้

1) $x + 2y = 6$
 $3x - y = 2$

โดยที่ x และ y เป็นตัวแปร จะเห็นว่า ข้อ 1) มีสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 2 สมการ ดังนั้น จะเรียกว่า ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

2.1 ระบบสมการเชิงเส้น (System of Linear Equations)

ความรู้ในเรื่องระบบสมการเชิงเส้น สามารถนำไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ หรือปัญหาในชีวิตประจำวัน เช่น การพยากรณ์อากาศ การวางแผนการลงทุน และการนำไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณทางวิทยาศาสตร์ เป็นต้น

1. สมการเชิงเส้น (Linear Equations)

สมการเชิงเส้น คือ สมการที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรทุกตัวเป็นหนึ่ง ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ให้ a_1, a_2, \dots, a_n และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ a_1, a_2, \dots, a_n ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียกสมการ $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ ว่า สมการเชิงเส้น n ตัวแปร เมื่อ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร

จากบทนิยาม นักเรียนจะเห็นว่า

$-8x + 4 = 6$ เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยที่ x เป็นตัวแปร

$3x - 2y = 5$ เป็นสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยที่ x และ y เป็นตัวแปร

$2x - 3y + z = -5$ เป็นสมการเชิงเส้นสามตัวแปร โดยที่ x, y และ z เป็นตัวแปร

การเขียนสมการเชิงเส้น n ตัวแปร นิยมใช้ตัวแปร ดังนี้

ถ้า $n = 2$ นิยมให้ตัวแปรเป็น x, y เช่น $14x + y = -5$

ถ้า $n = 3$ นิยมให้ตัวแปรเป็น x, y และ z เช่น $-14x - 13y + 8z = 100$

ถ้า $n = 4$ นิยมให้ตัวแปรเป็น x, y, z และ t เช่น $50x - 7y + 5z - 9t = 0$

ถ้า $n \geq 5$ นิยมให้ตัวแปรเป็น x_1, x_2, \dots, x_n เช่น $7x_1 - 6x_2 + \dots + 10x_n = -11$

2. ระบบสมการเชิงเส้น (System of Linear Equations)

ระบบสมการเชิงเส้น ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นตั้งแต่สองสมการขึ้นไป ตัวอย่างเช่น

$$\left. \begin{aligned} x + 2y &= 6 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned} \right\} \text{เรียกว่า ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร}$$

โดยที่ x และ y เป็นตัวแปร



เกร็ดแค้นครู

ครูยกตัวอย่างสมการเชิงเส้นตั้งแต่สองตัวแปรขึ้นไปเพิ่มเติม แล้วใช้วิธีการสุ่มนักเรียนถาม-ตอบ เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน



นักเรียนควรรู้

1 สมการ (equation) คือ ประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับ เช่น $2x = 2, 3x - 2x = 7, 5y + 2 = -2y + 16$

กิจกรรม สร้างเสริม

ให้นักเรียนจับคู่แล้วหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ต่อไปนี้

$17x - 28y = 7$
 $2x - 2y = 6$

กิจกรรม ทำทาย

ให้นักเรียนจับคู่แล้วหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ดังนี้

$\frac{4x - 2y}{4} = -3x + 4y$
 $2y - 21x = 5$



$$\left. \begin{aligned} 2x - y + 4z &= 0 \\ -x + 5y &= 5z \\ y + 7z &= x \end{aligned} \right\}$$

เรียกว่า ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร

โดยที่ x , y และ z เป็นตัวแปร

บทนิยาม ระบบสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร หมายถึง ชุดของสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร จำนวน m สมการ โดยที่ $m \geq 2$ คำตอบของระบบสมการนี้ คือ จำนวน n จำนวน ที่นำไปแทนตัวแปร $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ในทุก ๆ สมการ ตามลำดับแล้วได้สมการที่เป็นจริงทั้งหมด

รูปแบบของระบบสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร และประกอบด้วยสมการเชิงเส้น m สมการ โดยที่ $m \geq 2$ คือ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

เมื่อ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ เป็นสมการเชิงเส้น ทุก $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ และ $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, b_1$ เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

สำหรับหน่วยการเรียนรู้นี้ นักเรียนจะได้ศึกษาระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปรทำได้หลายวิธี เช่น การกำจัดตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง การใช้ความรู้เรื่องเมทริกซ์ การใช้ความรู้เรื่องดีเทอร์มิแนนต์ ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษารายละเอียดในหน่วยนี้

เมทริกซ์ 123

ขั้นสอน

$$\begin{aligned} 2) \quad 2x - y + 4z &= 0 \\ -x + 5y &= 5z \\ y + 7z &= x \end{aligned}$$

โดยที่ x, y และ z เป็นตัวแปร จะเห็นว่า ข้อ 2) มีสมการเชิงเส้นสามตัวแปร 3 สมการ ดังนั้น จะเรียกว่า ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร

5. ครูอธิบายว่า ระบบสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร หมายถึง ชุดของสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร จำนวน m สมการ โดยที่ $m \geq 2$ คำตอบของระบบสมการนี้ คือ จำนวน n จำนวน ที่นำไปแทนตัวแปร $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ในทุก ๆ สมการ ตามลำดับแล้วได้สมการที่เป็นจริงทั้งหมด
6. ครูกล่าวว่า การหาค่าของตัวแปรจากระบบสมการ เราจะเรียกว่าเป็นการแก้ระบบสมการ ซึ่งสามารถทำได้หลายวิธี เช่น การกำจัดตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง การใช้ความรู้เรื่องเมทริกซ์ การใช้ความรู้เรื่องดีเทอร์มิแนนต์

กิจกรรม 21st Century Skills

ให้นักเรียนปฏิบัติ ดังนี้

1. ครูให้นักเรียนจับคู่ สืบค้นวิธีการตรวจสอบคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
2. ให้นักเรียนแต่ละคู่ สร้างโจทย์ของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร พร้อมแสดงวิธีทำและหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร แล้วนำความรู้ที่ได้จากการสืบค้นวิธีการตรวจสอบคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ตรวจสอบคำตอบว่าถูกต้องหรือไม่
3. นักเรียนแต่ละคู่ออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน โดยใช้โปรแกรม PowerPoint



นักเรียนควรรู้

- 1 จำนวนจริง หมายถึง จำนวนใดๆ ซึ่งอาจเป็นจำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะ



สื่อ Digital

ครูอาจให้นักเรียนดูสื่อการเรียนรู้ออนไลน์ www.youtube.com โดยใช้คำสืบค้นว่า “ระบบสมการเชิงเส้น”



ข้อสอบ

7. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 1 ในหนังสือเรียน หน้า 112 จากนั้นครูอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับการเขียนคำตอบของระบบสมการในกรอบ “คณิตน่ารู้” แล้วให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 112
8. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

ตัวอย่างที่ 1



ให้หาคำตอบของระบบสมการ

$$x + y - 2z = 3$$

$$2x - y + z = 8$$

$$x - y + 3z = 1$$

วิธีทำ กำหนด $x + y - 2z = 3$ (1)

$$2x - y + z = 8$$
(2)

$$x - y + 3z = 1$$
(3)

(1) + (2) จะได้ $3x - z = 11$ (4)

(1) + (3) จะได้ $2x + z = 4$ (5)

(4) + (5) จะได้ $5x = 15$ (6)

$$x = 3$$

แทน $x = 3$ ใน (5) จะได้

$$2(3) + z = 4$$

$$z = -2$$

แทน $x = 3$ และ $z = -2$ ใน (1) จะได้

$$3 + y - 2(-2) = 3$$

$$y = -4$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(3, -4, -2)$

คณิตน่ารู้

คำตอบของระบบสมการนิยมเขียนในรูปของ n สิ่งอันดับ (ordered n -tuple) เช่น (x_1, x_2, \dots, x_n)



ลองทำดู

ให้หาคำตอบของระบบสมการ

$$5x + 4y - z = 9$$

$$x - 5y + z = 18$$

$$6x + 3y - z = 16$$

ตัวอย่างที่ 2



ให้หาคำตอบของระบบสมการ

$$x + y + 5z = 8$$

$$x + 2y + 7z = 12$$

$$2x - y + 4z = 4$$



เกร็ดแะครู

ครูจัดกิจกรรมเพิ่มเติมโดยให้นักเรียนจับคู่กัน ส่งตัวแทนออกมาจับสลากบัตรระบบสมการสามตัวแปร และให้แต่ละคู่แลกเปลี่ยนความรู้กัน แล้วครูใช้วิธีการสุ่มเลขที่นักเรียนออกมาเฉลยหน้าชั้นเรียน โดยมีครูและเพื่อนๆ ตรวจสอบความถูกต้อง



สื่อ Digital

ครูอาจให้นักเรียนดูสื่อการเรียนรู้ผ่าน www.youtube.com โดยใช้คำสืบค้นว่า “ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร”

ข้อสอบเน้นการคิด

ให้หาคำตอบของระบบสมการ

$$x - 2y - 2z = 1$$

$$3x + 6y + 3z = 0$$

$$x + y + z = -2$$

เฉลยคำตอบ กำหนดให้ $x - 2y - 2z = 1$ (1)

$$3x + 6y + 3z = 0$$
 (2)

$$x + y + z = -2$$
 (3)

(2) ÷ 3 จะได้ $x + 2y + z = 0$ (4)

(3) × 2 จะได้ $2x + 2y + 2z = -4$ (5)

(4) - (3) จะได้ $y = 2$

(5) + (1) จะได้ $x = -1$

แทนค่า $x = -1$ และ $y = 2$ ใน (1) จะได้ $z = -3$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(-1, 2, -3)$



วิธีทำ กำหนด $x + y + 5z = 8$ (1)

$$x + 2y + 7z = 12 \quad \text{.....(2)}$$

$$2x - y + 4z = 4 \quad \text{.....(3)}$$

(2) - (1) จะได้ $y + 2z = 4$ (4)

$2 \times$ (4) จะได้ $2y + 4z = 8$ (5)

(2) - (5) จะได้ $x + 3z = 4$ (6)

จาก (4) จะได้ $y = 4 - 2z$

จาก (5) จะได้ $x = 4 - 3z$

เมื่อแทน x และ y ใน (1) จะได้

$$(4 - 3z) + (4 - 2z) + 5z = 8$$

$$8 = 8$$

เมื่อแทน x และ y ใน (2) จะได้

$$(4 - 3z) + 2(4 - 2z) + 7z = 12$$

$$12 = 12$$

เมื่อแทน x และ y ใน (3) จะได้

$$2(4 - 3z) - (4 - 2z) + 4z = 4$$

$$4 = 4$$

ดังนั้น $(4 - 3z, 4 - 2z, z)$ สอดคล้องกับสมการ (1), (2) และ (3)

จะได้ว่า คำตอบของระบบสมการ คือ $(4 - 3z, 4 - 2z, z)$ เมื่อ $z \in \mathbb{R}$

หรือเซตของคำตอบของระบบสมการ คือ

$$\{(x, y, z) \mid x = 4 - 3z, y = 4 - 2z, z \in \mathbb{R}\}$$

หรือ $\{(4 - 3z, 4 - 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$



ลองทำดู

ให้หาคำตอบของระบบสมการ

$$-4x - y - 6z = 3$$

$$2x + y + 5z = -2$$

$$6x - 2y - 5z = -1$$

บทเรขาคณิต 125

ข้อสอบ

9. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 2 ในหนังสือเรียน หน้า 122-123 จากนั้นให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 123
10. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู” จนได้ข้อสรุปว่า ระบบสมการนี้เป็นระบบสมการที่มีหลายคำตอบ

กิจกรรมสร้างเสริม

ให้นักเรียนจับคู่ แล้วส่งตัวแทนมาจับสลากโจทย์การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร

แล้วให้นักเรียนหาคำตอบพร้อมบอกเหตุผลของระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร จากนั้นครูสุ่มนักเรียน 2-3 คู่ ออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน พร้อมกับนักเรียนคนอื่นร่วมแสดงความคิดเห็น



เกร็ดแฉะครู

ครูให้นักเรียนจับคู่แล้วทำกิจกรรม “ทนายช่างซัก (Rally Robin)” โดยให้นักเรียนแต่ละคู่พูดคุย ซักถามกัน ในเรื่องการแก้ระบบสมการในตัวอย่างที่ 2 จากนั้นครูทำกิจกรรมร่วมกับนักเรียน โดยครูกับนักเรียนพูดคุย ซักถามกันว่า คำตอบของระบบสมการตรงกันหรือไม่ พร้อมทั้งอธิบายซึ่งกันและกันจนมีความเข้าใจที่ตรงกัน



นักเรียนควรรู้

1 เซต หมายถึง ค่าที่ใช้ระบุถึงกลุ่มหรือหมู่ของสิ่งต่างๆ โดยใช้เงื่อนไขที่แน่นอนว่า สิ่งใดอยู่ในกลุ่มหรือสิ่งใดมิได้อยู่ในกลุ่มนั้นๆ



ขั้นสอน

11. ครูเขียนโจทย์ของตัวอย่างที่ 3 บนกระดาน โดยครูจะยังไม่ให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียน จากนั้นครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน แล้วกำหนดเลขประจำตัวนักเรียนเป็น 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ แล้วให้นักเรียนในกลุ่มทำกิจกรรม “รวมหัวคิด (Numbered Heads Together)” โดยให้นักเรียนในกลุ่มช่วยกันหาคำตอบของระบบสมการที่ครูเขียนบนกระดาน เมื่อนักเรียนในแต่ละกลุ่มทำเสร็จแล้ว ครูสุ่มเรียกเลขหมายใดก็ได้ ให้ตอบคำถาม ซึ่งนักเรียนที่ถูกเรียกต้องสามารถตอบได้ พร้อมทั้งอธิบายได้ (เพราะนักเรียนในกลุ่มต้องร่วมกันคิดและต้องทำความเข้าใจให้ตรงกัน) แต่จะผิดหรือถูก ครูจะยังไม่เฉลย แต่จะสุ่มเรียกทุกกลุ่มในคำถามเดียวกันเพื่อให้นักเรียนได้ตรวจสอบคำตอบและวิธีทำ ครูสุ่มถามนักเรียนทุกกลุ่มจนได้คำตอบเดียวกันว่า ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ
12. ครูให้นักเรียนแต่ละคนในกลุ่มทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 124
13. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู” จนได้ข้อสรุปว่า ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

ตัวอย่างที่ 3



ให้หาคำตอบของระบบสมการ

$$x + 2y - z = 1$$

$$2x + 2y - 3z = 4$$

$$3x + 4y - 4z = 7$$

วิธีทำ กำหนด $x + 2y - z = 1$ (1)

$$2x + 2y - 3z = 4$$
(2)

$$3x + 4y - 4z = 7$$
(3)

(1) + (2) จะได้ $3x + 4y - 4z = 5$ (4)

จากสมการข้างต้นจะเห็นว่า ถ้า (x, y, z) เป็นคำตอบของระบบสมการที่กำหนด

แล้ว (x, y, z) ต้องสอดคล้องกับสมการ (1), (2) และ (3)

และถ้า (x, y, z) สอดคล้องกับสมการ (1) และ (2) แล้ว (x, y, z) ต้องสอดคล้องกับสมการ (4)

แต่จากสมการ (3) จะเห็นว่า $3x + 4y - 4z = 7$

และจากสมการ (4) จะเห็นว่า $3x + 4y - 4z = 5$

ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่า ไม่มี x, y และ z ใดๆ ที่ทำให้สมการ (3) และ (4) เป็นจริงพร้อมกันได้

ดังนั้น ระบบสมการที่กำหนดไม่มีคำตอบ



ลองทำดู

ให้หาคำตอบของระบบสมการ

$$3x + y + z = 3$$

$$4x + y + 3z = 2$$

$$7x + 2y + 4z = 9$$

ข้อสอบเน้นการคิด

ข้อใดถูกต้อง

กำหนดให้ $x + 2y = 2 + z$

$$2x + 3y = 5 + z$$

$$3x + 5y - 2z = 11$$

1. ระบบสมการมีคำตอบเดียว

2. ระบบสมการไม่มีคำตอบ

3. ระบบสมการมีหลายคำตอบ

4. ข้อมูลไม่เพียงพอในการหาคำตอบ

เฉลยคำตอบ กำหนดให้ $x + 2y - z = 2$ (1)

$$2x + 3y - z = 5$$
 (2)

$$3x + 5y - 2z = 11$$
 (3)

(1) + (2) จะได้ $3x + 5y - 2z = 7$ (4)

จะเห็นว่า ถ้า (x, y, z) เป็นคำตอบของระบบสมการที่กำหนด แล้ว (x, y, z) ต้องสอดคล้องกับสมการ (1), (2), (3) และ (4) แต่จากสมการ (3) จะเห็นว่า $3x + 5y - 2z = 11$ และจากสมการ (4) จะเห็นว่า $3x + 5y - 2z = 7$ ซึ่งไม่มี x, y และ z ใดๆ ที่ทำให้สมการ (3) และ (4) เป็นจริงพร้อมกันได้

นั่นคือ ระบบสมการไม่มีคำตอบ

ดังนั้น คำตอบ คือ ข้อ 2.)

จากตัวอย่างที่ 1-3 จะเห็นว่า คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร มี 3 ลักษณะ คือ

- 1) ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปรที่มีคำตอบเดียว
- 2) ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปรที่มีหลายคำตอบ
- 3) ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปรที่ไม่มีคำตอบ

ระบบสมการเชิงเส้นชุดหนึ่ง ๆ จะให้คำตอบของระบบสมการเพียงลักษณะเดียวเท่านั้น

แบบฝึกทักษะ 2.1

ระดับพื้นฐาน

1. แก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{array}{ll} 1) x + 3y = 8 & 2) x - 3y = 4 \\ x - 2y = 3 & -2x + 6y = 2 \\ 3) x + y + z = 6 & 4) 3x + 2y - z = 4 \\ x - y + z = 2 & 5x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = 0 & x - 6y + 2z = 7 \\ 5) x + y = 2 & 6) 2x + y - z = 2 \\ x + 3y + z = 5 & 2x + 2y - 4z = 5 \\ 3x + y - z = 3 & 4x + 3y - 5z = 9 \end{array}$$

ระดับกลาง

2. แก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{array}{ll} 1) 2x + 2y + 2z + 2t = 11 & 2) 2x - y + 3z - w = -3 \\ x + y + 2z + 2t = 5 & 3x + 2y - z + w = 13 \\ 2y + 5z + 2t = 5 & x - 3y + z - 2w = -4 \\ x + y + 3z + 4t = 1 & -x + y + 4z + 3w = 0 \end{array}$$

ขั้นสอน

14. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 2.1 ในหนังสือเรียน และ Exercise 2.1 ในแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รอบยอดของนักเรียน ดังนี้

- สมการเชิงเส้นเป็นอย่างไร
(แนวตอบ สมการที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรทุกตัวเป็นหนึ่ง)
- สมการเชิงเส้นที่มีหลายตัวแปร จะเรียกว่าอย่างไร
(แนวตอบ สมการเชิงเส้น n ตัวแปร เมื่อ n แทนจำนวนตัวแปร)
- ระบบสมการเชิงเส้นเป็นอย่างไร
(แนวตอบ สมการเชิงเส้นที่มีมากกว่าหนึ่งสมการ)
- การแก้ระบบสมการเชิงเส้นทำได้อย่างไร
(แนวตอบ นักเรียนสามารถตอบได้หลากหลายขึ้นอยู่กับความรู้พื้นฐานของนักเรียนแต่ละคน เช่น การกำจัดตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง)

ขั้นประเมิน

1. ครูถาม-ตอบนักเรียน เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ
2. ครูตรวจแบบฝึกทักษะ 2.1
3. ครูตรวจ Exercise 2.1
4. ครูสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล
5. ครูสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม
6. ครูสังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรม สร้างเสริม

ให้นักเรียนปฏิบัติ ดังนี้

1. ให้นักเรียนจับคู่หาคำตอบของระบบสมการ ดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{l} 2x - y + z + 2t = 1 \\ x + y + z + 3t = 3 \\ 3x + 2y - 2z + t = 0 \\ -x - 3y + 3z + t = 1 \end{array}$$

2. เสร็จแล้วนำมาส่งครูตรวจ



แนวทางการวัดและประเมินผล

ครูสามารถวัดและประเมินผลพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม โดยศึกษาเกณฑ์การวัดการประเมินผลจากการประเมินของแผนการจัดการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

| แบบประเมินการสังเกต | | | | | | |
|---------------------|--------------|--------------|---------------|------------|---------|--------------|
| ผู้ประเมิน | ชื่อผู้เรียน | การเตรียมการ | การมีส่วนร่วม | การสื่อสาร | การสรุป | การประเมินผล |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

ครูผู้สอน: _____

ขั้นนำ (Induction)

1. ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นที่ได้เรียนมาในชั่วโมงที่ 1
2. ครูสุ่มนักเรียนออกมาเฉลยการบ้านหน้าชั้นเรียน โดยเขียนแสดงวิธีทำบนกระดาน จากนั้นครูตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 10 หลังจากที่ทำคำตอบเสร็จเรียบร้อยแล้ว ครูให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อน เพื่อแลกเปลี่ยนคำตอบกัน สนทนาซักถามซึ่งกันและกันจนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน จากนั้นครูสุ่มถามนักเรียน ดังนี้
 - เมทริกซ์ข้างต้นมีจำนวนแถวและจำนวนหลักเป็นเท่าใด
 - ถ้าตัวเลขแต่ละตัวที่อยู่ในเมทริกซ์ เรียกว่า “สมาชิกของเมทริกซ์” และสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ คือ จำนวนยางลบแต่ละยี่ห้อในร้าน ก. แล้วจำนวนสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2 คืออะไร
 - ถ้าสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ คือ จำนวนยางลบยี่ห้อที่ขายอยู่ในร้าน ก. และร้าน ข. แล้วสมาชิกแต่ละตัวในหลักที่ 2 และหลักที่ 3 คืออะไร
2. ครูสรุปเพิ่มเติมว่า “จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ ชุดของจำนวนที่เขียนในรูปวงเล็บ [] หรือ () เป็นการนำจำนวนที่อยู่ในตารางมาเขียนใหม่ตามแถวและคอลัมน์เดิม ในทางคณิตศาสตร์ จะเรียกชุดของจำนวนที่เขียนในวงเล็บ [] หรือ () ว่า เมทริกซ์”

2.2 เมทริกซ์ (Matrix)

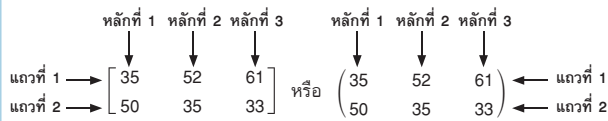
กิจกรรม คณิตศาสตร์

ให้นักเรียนพิจารณาตารางแสดงจำนวนยางลบยี่ห้อ A, B และ C ที่เหลืออยู่ในร้าน ก. และร้าน ข. ต่อไปนี้

| | ยางลบ A | ยางลบ B | ยางลบ C |
|---------|---------|---------|---------|
| ร้าน ก. | 35 | 52 | 61 |
| ร้าน ข. | 50 | 35 | 33 |

ตารางที่ 1

จากตารางข้างต้น สามารถนำจำนวนยางลบยี่ห้อ A, B และ C ที่ขายอยู่ในร้าน ก. และร้าน ข. มาเขียนใหม่ในวงเล็บ [] หรือ () ได้ ดังนี้



ในทางคณิตศาสตร์จะเรียกการเขียนชุดของจำนวนในลักษณะดังกล่าวว่า เมทริกซ์ ซึ่งในหนังสือเล่มนี้จะใช้วงเล็บ []

จากข้อมูลข้างต้น ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. เมทริกซ์ข้างต้นมีจำนวนแถวและจำนวนหลักเป็นเท่าใด
2. ถ้าตัวเลขแต่ละตัวที่อยู่ในเมทริกซ์เรียกว่า “สมาชิกของเมทริกซ์” และสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ คือ จำนวนยางลบแต่ละยี่ห้อในร้าน ก. แล้วจำนวนสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2 คืออะไร
3. ถ้าสมาชิกแต่ละตัวในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ คือ จำนวนยางลบยี่ห้อ A ที่ขายอยู่ในร้าน ก. และร้าน ข. แล้วสมาชิกแต่ละตัวในหลักที่ 2 และหลักที่ 3 คืออะไร

เกร็ดน่ารู้

Jame Joseph Sylvester



Jame Joseph Sylvester (ค.ศ. 1814-1897) เป็นนักคณิตศาสตร์

ชาวยิว ที่เป็นผู้บัญญัติคำว่าเมทริกซ์ (Matrix) ซึ่งต่อมาแนวคิดเกี่ยวกับเมทริกซ์ได้ถูกนำมาใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้น

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์จะเห็นว่า ชุดของจำนวนที่เขียนอยู่ในวงเล็บ [] หรือ () เป็นการนำจำนวนที่อยู่ในตารางมาเขียนเรียงใหม่ตามแถวและคอลัมน์เดิม ในทางคณิตศาสตร์จะเรียกชุดของจำนวนที่เขียนในวงเล็บ [] หรือ () ว่า เมทริกซ์ ซึ่งมีนิยาม ดังนี้

เฉลย กิจกรรมคณิตศาสตร์

1. เมทริกซ์ข้างต้นมีจำนวนแถว 2 แถว และจำนวนหลัก 3 หลัก
2. จำนวนสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ คือ จำนวนยางลบแต่ละยี่ห้อในร้าน ข.
3. สมาชิกแต่ละตัวในหลักที่ 2 ของเมทริกซ์ คือ จำนวนยางลบยี่ห้อ B ที่ขายอยู่ในร้าน ก. และร้าน ข. และสมาชิกแต่ละตัวในหลักที่ 3 ของเมทริกซ์ คือ จำนวนยางลบยี่ห้อ C ที่ขายอยู่ในร้าน ก. และร้าน ข.



สื่อ Digital

ครูอาจให้นักเรียนดูสื่อการเรียนรู้อ่าน www.youtube.com โดยใช้คำสืบค้นว่า “เมทริกซ์”

กิจกรรม สร้างเสริม

ให้นักเรียนเขียนเมทริกซ์ต่อไปนี้ ให้ในรูปตารางแสดงจำนวนปากกา ยี่ห้อ A, B และ C ที่อยู่ในร้าน 1 และร้าน 2

$$\begin{bmatrix} 23 & 40 & 35 \\ 42 & 33 & 51 \end{bmatrix}$$

กิจกรรม ทำทาย

ให้นักเรียนจับคู่แล้วเขียนเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถว 2 แถว และจำนวนหลัก 3 หลัก ต่อไปนี้

1. แถวที่ 1 จำนวนตัวเลข 3 จำนวน รวมกันได้ 70 โดยหลักที่ 1 คือ 25 และหลักที่ 3 เป็น 2 เท่าของหลักที่ 2
2. แถวที่ 2 โดยหลักที่ 1 คือ 35 หลักที่ 2 เป็นสามเท่าของหลักที่ 1 และหลักที่สาม คือ ผลบวกของหลักที่ 1 และหลักที่ 2